AM2 | Final | HOJA N° 1/3 | FECHA 16-12-25

1 V o F

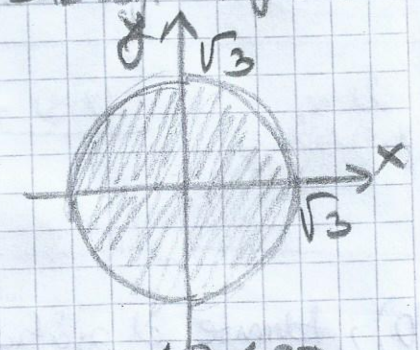
a) El volumen del sólido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leq 12$
$x^2+y^2 \leq z\}$

es el valor de $\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{12}} \left[\int_{r^2}^{\sqrt{12-r^2}} r \, dz \right] dr \right] d\theta$

Analizo la intersección de $x^2+y^2+z^2 = 12$ con $x^2+y^2 = z$ para observar la proyección en xy

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 12 \\ x^2+y^2 = z \end{cases} \to z + z^2 = 12$$

$$\boxed{z = 3} \longrightarrow x^2+y^2 \leq 3$$



$z \leq \sqrt{12-x^2-y^2}$

$r^2 \leq z \leq \sqrt{12-r^2}$

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq \sqrt{3}$

$\neq \sqrt{12}$

$$Vol = \iiint_V dvol \overset{CV}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{r^2}^{\sqrt{12-r^2}} \underset{\uparrow \\ Jac}{r} \, dz\,dr\,d\theta \Rightarrow F$$

b) La circ. del campo para $\bar{f}(x,y) = (\cos(x^2)+y^2, \text{sen}(y^2)+2xy)$ a lo largo de cualquier circunferencia de radio r es nula

$\bar{F} = (P,Q)$ con P, Q sumas algebraicas de funciones elementales

$\bar{F} \in C^1$ ✓ circunferencia es una curva suave ✓

Analizo si $P'_y = Q'_x \rightarrow \begin{rmatrix} P'_y = 2y \\ Q'_x = 2y \end{rmatrix} \Big\rangle = ✓$

$\bar{F}$ es campo conservativo $\Rightarrow$ la circulación de f a lo largo de cualquier curva cerrada es nula

V

NOTA

No es vectorial

T2 a) Definir campo escalar diferenciable en un punto para $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0,y_0) \in A^\circ$

f es diferenciable en (x_0,y_0) si: $\quad \vec{v} = (a,b)$

$$f((x_0,y_0)+\vec{v}) - f(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0)\,\vec{v} + \varepsilon(\vec{v})\,\|\vec{v}\|$$

donde $\lim\limits_{\vec{v}\to\vec{0}} \varepsilon(\vec{v}) = 0$

Otra forma: f es dif en (x_0,y_0) si:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0}$$

b) ¿Admite el gráfico de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ plano tangente en el origen de coord? $\vec{v} = (a,b)$ con $a^2+b^2 = 1$

Analizo la derivabilidad (pues no parece ser diferenciable)

$$f'((0,0),\vec{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\vec{v}) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{\cancel{h}ah^2b^2}{h^2a^2+h^2b^2} = \lim_{h\to 0} \frac{a\cancel{h^2}b^2}{\cancel{h^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}} = ab^2$$

$f'((0,0),\vec{v}) = ab^2$ es derivable pero NO es diferenciable

$f'((0,0),(a,b))$ NO resulta ser combinación lineal entre el gradiente y $\vec{v} = (a,b)$, que es lo que pasaría si fuese diferenciable

No dif $\Rightarrow$ No admite plano tangente

NOTA

AM2	Final	HOJA N° 2/3 FECHA 16-12-25

P1) Calcular la masa del cuerpo $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z \leq 4 + x^2 + y^2$
$2x^2 + 2y^2 \leq z\}$

si su densidad, en cada punto, es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

$$2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 4 + x^2 + y^2$$

$$2x^2 + 2y^2 \leq 4 + x^2 + y^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 \leq 4}$$

Proyección de W en xy

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$$

$k \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\delta(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{\delta(r,t,z) = k\,r}$$

$$0 \leq r \leq 2$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$2r^2 \leq z \leq 4 + r^2$$

$$\text{Masa}_W = \iiint_W \overbrace{\delta(x,y,z)}^{k\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz = k\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{2r^2}^{4+r^2} \underset{\text{Jac}}{r}\cdot \underset{\sqrt{x^2+y^2}}{r}\,dz\,dr\,dt =$$

$$= k\int_0^{2\pi} dt \int_0^2 \overbrace{r^2(4+r^2-2r^2)}^{4r^2-r^4}\,dr = k\,2\pi\cdot\frac{64}{15}$$

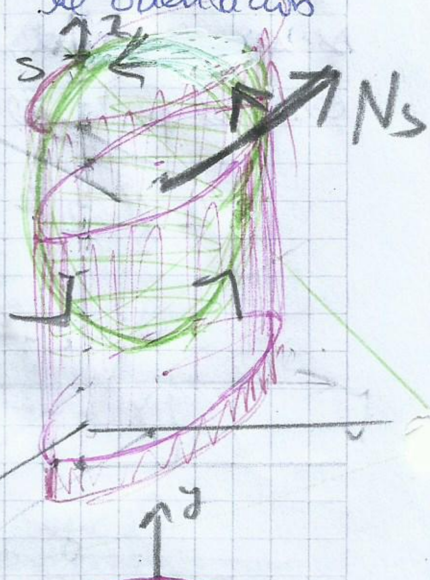
$$\boxed{\text{Masa}_W = \frac{128}{15}k}$$

NOTA

(P2) Sea γ la curva intersección de $S_1: x+y+z=5 \rightarrow N=(1,1,1)$

$$S_2: \frac{x^2}{4}+y^2=2y$$

Calcular la circ. del campo $\bar{f}(x,y,z)=(\overbrace{2xy}^{P}, \overbrace{yz}^{Q}, \overbrace{xz+5y}^{R})$ a lo largo de la curva γ indicando gráficamente la orientación asignada a la curva



$$S_2: \frac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$$

$a=2 \quad b=1$

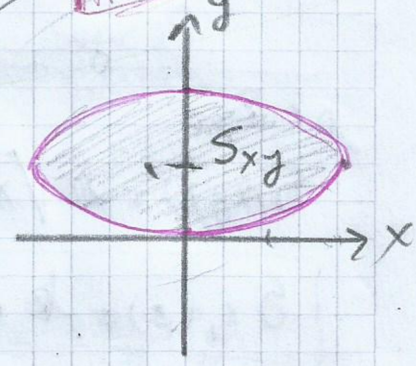
cilindro elíptico

$\underbrace{\text{cortado por un plano}: x+y+z=5}$

curva cerrada y suave

$\bar{f} \in C^1$ (polinómicas)

S sup orientable cuya frontera es C



$$\Rightarrow \oint_C \bar{f}\,d\bar{l} = \iint_{S_{xy}} \text{rot}(\bar{F})\, N\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} (5-y, -z, -2x)(1,1,1)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_x} 5-y-z-2x\,dx\,dy \overset{z=5-x-y}{=} \iint_{S_{xy}} \cancel{5}-\cancel{y}-\cancel{5}+x+\cancel{y}-2x\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_{S_{xy}} x\,dx\,dy = 0$$ (simetría reflexiva con respecto al eje y)

$$\boxed{\oint_C \bar{F}\,d\bar{l} = 0}$$

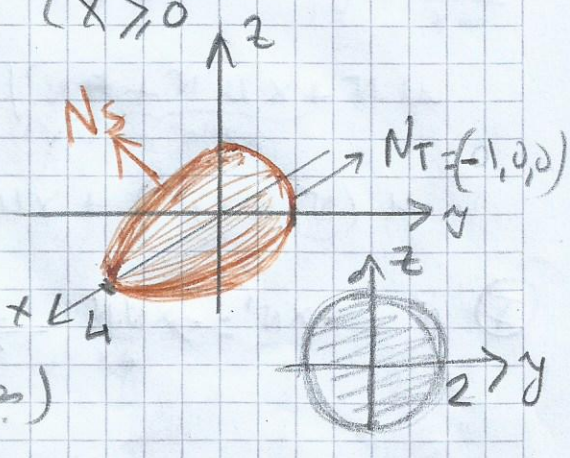
$$\text{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = (5-y, 0-z, 0-2x)$$

NOTA

AM 2	Final	HOJA N° 3/3 FECHA 16-12-25

(P3) Sea $\bar{F} = \nabla\varphi(x,y,z)$. Calcular el flujo del campo $\bar{F}$ a través de la sup. abierta definida por $x = 4 - y^2 - z^2$ con $x \geq 0$ siendo $\varphi(x,y,z) = x^2y + y^2z$. Indicar orientación elegida

$$\bar{F}_{(x,y,z)} = (2xy,\ x^2 + 2yz,\ y^2) \qquad S: \begin{cases} x = 4 - (y^2 + z^2) \\ x \geq 0 \end{cases}$$



T: disco $r = 2$ en $x = 0$

SUT es sup frontera de W orientada al exterior

W región de $\mathbb{R}^3$

$\bar{F} \in C^1$ (componentes polinómicas)

$$\Rightarrow \oiint_{SUT} \bar{F}\,d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\,d\text{vol} = \iint_S \bar{F}\,d\bar{s} + \iint_T \bar{F}\,ds$$

$$\operatorname{div}(\bar{F}) = 2y + 2z = 2(y+z)$$

$$\oiint_{SUT} \bar{F}\,d\bar{s} = 2\iiint_W y + z\,dx\,dy\,dz = \boxed{0 = \oiint_{SUT} \bar{F}\,d\bar{s}}$$

la proyección es simétrica en y y en z

$$\iint_T \bar{F}\,d\bar{s} = \iint_{T_{zy}} (2xy,\ x^2 + 2yz,\ y^2)(-1,0,0)\,dz\,dy = \iint_{T_{zy}} -2\overset{x=0}{x}y\,dy\,dz = 0$$

$$\underbrace{\iint_{SUT} \bar{F}\,d\bar{s}}_{0} - \underbrace{\iint_T \bar{F}\,d\bar{s}}_{0} = \boxed{\iint_S \bar{F}\,d\bar{s} = 0}$$

NOTA

P4) Sea y_p la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\sec^2(2x) - y}{x} \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Mostrar que $\lim_{x \to 0} y_p$ es igual al valor extremo (global) de la función definida por $g(x,y) = x^2y^2 + 2$

$$\frac{dy}{dx} = y' \longrightarrow y + xy' = 2\sec^2(2x)$$

$$y = u \cdot v \rightarrow y' = u'v + uv'$$

$$u \cdot v + \underbrace{x(u'v + uv')}_{xu'v + xuv'} = 2\sec^2(2x)$$

$$u\underbrace{(v + xv')}_{0} + xu'v = 2\sec^2(2x) \Rightarrow \begin{cases} v + xv' = 0 & \text{I} \\ xu'v = 2\sec^2(2x) & \text{II} \end{cases}$$

I $\quad v = -xv' = -x\frac{dv}{dx} \longrightarrow -\frac{1}{x}dx = \frac{1}{v}dv \Rightarrow -\ln(x) + c = \ln(v)$

tomo $c=0$

$$\ln(x^{-1}) = \ln(v) \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{x}}$$

II $\quad xu'v = 2\sec^2(2x)$

$$\cancel{x} \cdot u' \frac{1}{\cancel{x}} = 2\sec^2(2x) \rightarrow \int u' = \int 2\sec^2(2x) \Rightarrow u = 2\frac{tg(2x)}{2} + c$$

$$\boxed{u = tg(2x) + c}$$

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x} \cdot (tg(2x) + c)$$

$$y(\pi) = 0 = \frac{1}{\pi}(\underbrace{tg(2\pi)}_{0} + c) = \frac{c}{\pi} = 0 \rightarrow c = 0$$

$$\boxed{y = \frac{tg(2x)}{x}} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(2x)}{x} \overset{\text{indet}}{=} \xrightarrow{\quad} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} 2\sec^2(2x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\underbrace{\cos^2(\underbrace{2x}_{\to 0})}_{\to 1}} = 2$$

$$g(x,y) = \underbrace{x^2y^2}_{\geq 0} + 2 \geq 2 \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$g(0,0) = 2$ es el mínimo global

=